令和５年度　教育研究発表会
ハイブリッド型分科会①　算数科（教育研究）　発表原稿

Argumentationを視点とした算数教育における練り上げの設計に関する研究

新潟市立早通南小学校
長沢　圭祐（平成27年度）

【主張】
算数教育における練り上げの形式化・形骸化が指摘されている。本研究では，算数教育における練り上げを「一般化過程における認識論的障害の克服を対象とする指導方法論」として捉える。誤答の修正を学習過程の一部として位置づけ，論拠の例外にあたる「反証」や，論拠の確実性の度合いを示す「限定詞」を観点とした発問行為を設定することで，子どもの論拠や裏づけが修正され，認識論的障害の克服に至る練り上げを設計することが可能であると考える。

１．研究主題設定の理由

我が国の問題解決学習の特徴は，問題解決後に「練り上げ」と呼ばれる数学的概念の構成を目的とした議論を行う点にある。しかし，山口（2013）が「多くの実践的研究では,「練り上げ」を重視する理論的な根拠が議論の俎上にのぼることは少なく,「練り上げ」が一種の指導方法として形式化，悪くいえば形骸化している」（p.12）と指摘する通り，練り上げが解決の発表会に留まることも少なくない。

先行研究では，議論過程を示すArgumentationの視点から，練り上げの機能，練り上げにおける発問行為などについて明らかにされてきた（cf.長沢 2015；2018）。実際の学習指導を行う上では，練り上げをいかに設計するかが問題となる。本稿では，Argumentationの視点から学習者の認識の変容過程を捉え，練り上げにおける教師の支援の観点を明らかにし，練り上げの設計原理と設計方法を明らかにすることを目的とする。

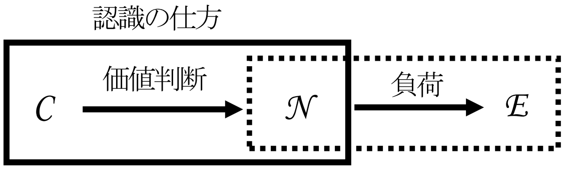
【研究仮説】
Argumentationの視点から子どもの議論過程を分析し認識の変容過程を捉えることで，発問の観点を明確化した練り上げを設計できるであろう。

２．練り上げに関する認識論的考察

2.1. コンセプションの静態

数学的概念は抽象・一般化により構成される（岩崎，2007，pp.57-75）。抽象は外延を一応固定しておいて，内包を明確にすること，一般化は内包を一応固定しておいて，それに応じる外延をさらに拡大することであり，論理学的に相補的な関係にある。

一般化過程においては，既有知識が一般化を阻害する現象の存在が指摘されている（Tall，2014，p.227）。この現象は認識論的障害と呼ばれ（バシュラール, 1975, p.18),「活動のある領域においてはよく機能し，それゆえよく確立されているにもかかわらず，次には，機能不全を起こし矛盾を導くような他の文脈においては満足に作用しない認識」（溝口，1995，p.38）と定義され，図１のC(C,N,E)モデルにより記述される（p.35）。



（$\mathcal{C}$：確信，$\mathcal{N}$：概念，$\mathcal{E}$：事象）

図１．C（C,N,E)モデル（溝口，2004，p.35）

図１は，子どもの漠然としたアイデア，イメージ，心的モデル等を示す〈概念 *notion*〉，〈概念〉が用いられる範囲や適合する事柄を示す〈事象 *event*〉，子どもの行動を説明する子どもの包括的な価値基準を示す〈確信 *conviction*〉の３つのカテゴリーを構成要素とする。認識論的障害の克服は，直面する〈事象〉に適用され得る〈概念〉と，この行動を価値判断する〈確信〉が転換することにより達成される。

本稿では練り上げを「一般化過程における認識論的障害の克服を対象とする指導方法論」として捉える。C(C,N,E)モデルは学習者の考えであるコンセプションの静態を記述するため，その動態を「否定」という視座から捉える。

2.2. コンセプションの動態

ある概念は，substance の意識，分析的否定，総合的否定という 3 段階の否定により更新される（大滝, 2013, p.112）。概念 A の本質 substance である，「A であることを規定するすべての非 A」（岩崎，1992，p.16）を意識するのが「substance の意識」にあたる。substance を否定により肯定的に命名するのが「分析的否定」にあたる。新しく構成された概念 B の視座から，その基盤となった A と¬A を否定によって特徴づけ，そこに新たな秩序をもたらすのが「総合的否定」にあたる。

例えば，割り切れる数から素数への概念の転換における一連の否定作用は図 2 に纏められる。

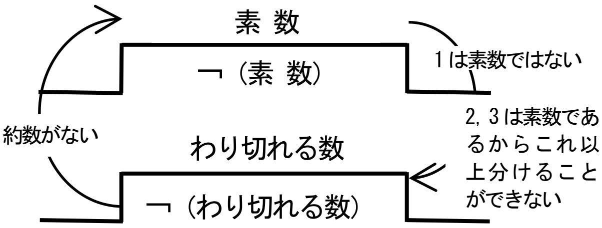


図２．Figure of Substance：素数（岩崎，1992，p.17）

否定論の視座からコンセプションの変容過程を捉えると，substance の意識は〈事象〉の転換，分析的否定は〈概念〉の転換，総合的否定は〈確信〉の転換として特徴づけられ，総合的否定の成立により認識論的障害の克服に至る（大滝，2013，pp.112-113）。

以上より，練り上げにおける認識論的障害の克服には，否定が重要な役割を果たすと考えられる。

2.3. Argumentation による認識論的障害の克服

否定による認識論的障害の克服は，練り上げにおいてどのような活動を通して行われるのだろうか。「2, 3 は素数であるからこれ以上分けることができない」という否定は，「素数は 1 と自分自身以外の正の約数を持たない」というメタ的な視点を根拠とする。このように，対象を俯瞰するメタ水準の思考は論証により促される（阿部，2015，p.5）。証明を未習である小学校段階においては，必ずしも演繹的推論による論証が行われるとは限らない。

本稿では，蓋然的推論を含む論証の過程に焦点をあてる Argumentation に着目する。Argumentation とは行動の合理性に関する主張を表現する言語に結び付いた技術や方法であり，その所産は Argument と呼ばれ,その構造は図3に示される（トゥールミン, 2011, p.153）。

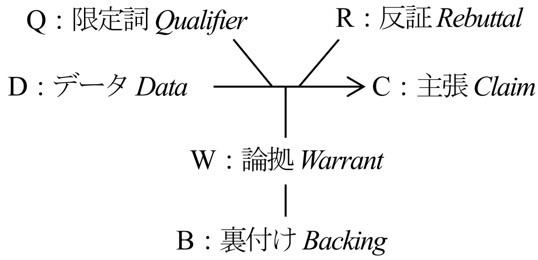


図３．The Layout of Arguments
（トゥールミン，2011，p.153）

図 3 は，発言者の言明を示す「主張 C」，主張を正当化する「データ D」，データを主張へと接続する推論規則を示す「論拠 W」，論拠が結論に与える力を示す「限定詞 Q」，論拠の例外を示す「反証 R」，論拠を支える「裏付け B」を構成要素に持つ。Argumentation は，上記の Argument の各要素を修正していく過程として捉えることができる。Argumentation は学習者のコンセプションを基盤として構成されるため，論拠には直面する〈事象〉に対する〈概念〉が表出すると考えられる。さらに，論拠は学習者の合理性に基づき選択されるため，裏付けには〈確信〉が含まれると考えられる。

Argumentation を否定論の視点からモデル化すると，以下のように表すことができる（長沢，2018，p.28）。

表１．Argument の修正（長沢，2018，p.28）

substance の意識	データ D_1 主張 C_1 が否定され，データ D_2 主張 C_2 へと修正される段階
分析的否定	反証 R_1 限定詞 Q_1 が顕在化し，論拠 W_1 が否定され，論拠 W_2 へと修正される段階
総合的否定	反証 R_2 限定詞 Q_2 が顕在化し，裏付け B_1 が否定され，裏付け B_2 へと修正される段階

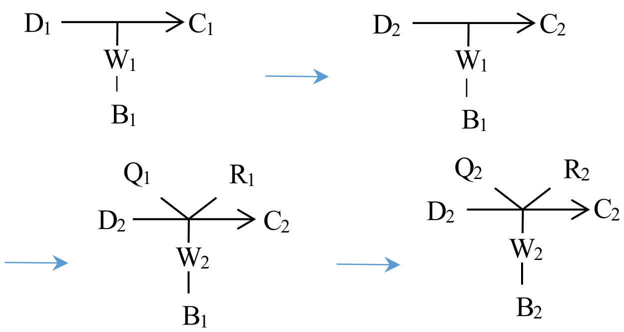


図４．Argumentation の否定論的モデル化
（長沢，2018，p.28）

2.4. Argumentation の促進方法としての発問行為

反証や限定詞は論拠の受容可能性を示唆する要素であり，Argumentation を促進するためには，反証と限定詞を顕在化する発問行為が要請される（長沢, 2018, p.31）。反証 R1 限定詞 Q1 は既存の論拠 W1→W2 の修正，反証 R2 限定詞 Q2 は既存の裏づけ B1→B2 の修正に寄与する。反証が顕在化することで，限定詞も顕在化するため，練り上げにおいては，反証 R_1→限定詞 Q_1→反証 R_2→限定詞 Q_2 という，4 つの発問行為が求められる。練り上げでは集団による相互作用を通して反証と限定詞を往還しながら，認識論的障害の克服が目指される。

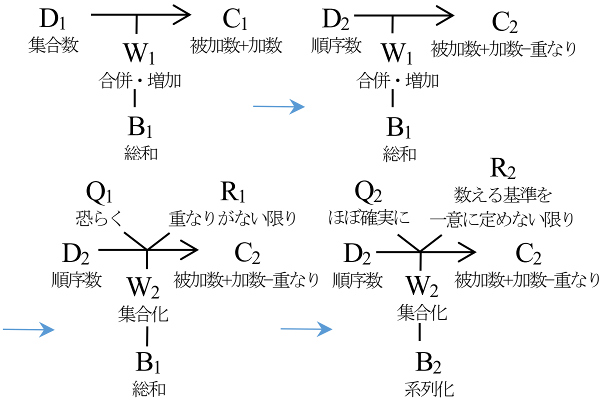


図５．Argumentation：順序数の計算

３．実践

岩崎（2007）は，「外延を明確にすることが，論議領域 *universe of discourse* の実質的拡張をさす場合と，法則の形式化をさす場合との 2 つに分かれる」（p.72）と指摘し，前者を対象の一般化，後者を操作の一般化として，数学的概念の一般化に対する区分を設けている。本稿では，2 つの一般化を目指す練り上げに関する実践を取りあげる。（実践の詳細については別紙参照。）

3.1. 操作の一般化：小学校第 1 学年「順序数の計算」

自然数には，「何人」などの集合数と，「後ろから何番目」などの順序数の 2 側面が存在する。現行カリキュラムにおいては，集合数の計算を学習した後，集合数の学習を行う。「けいすけさんは前から 7 番目，後ろから 4 番目。全部で何人？」などの順序数の計算の文脈で，7+4 と集合数の計算と捉えて立式する誤答が想定される。

実践では，練り上げにおいて 7+4=11 の誤答を提示すると，「けいすけさんが 2 人いるよ」と，今までの方法は R1「重なりがない限り」有効な方法であることから，図や式の蓋然性は Q1「恐らく」となり，図を通して順序数を集合数へ置き換える W2「集合化」により，式が 7+4-1=10 へ修正された。

その後，「どうやったら，けいすけさんが 2 人いるのに気付けたのかな？」という発問行為により，児童は「後ろから 4 番目は，前から 7 番目ですよね？だからけいすけさんは 2 人いるって分かりました。」と説明した。練り上げを通して，順序数を数え始める基準への着目し，B1「総和」から B2「系列化」へ修正され，認識論的障害の克服に至った。

一連の Argumentation は，図 5 のように示される。

3.2. 対象の一般化：小学校第 4 学年「垂直」

垂直の学習の際には，直角と垂直を混同し，適切に垂直な 2 線分を判断できない誤答が想定される。直角は第 2 学年で「紙を 2 回折ってできた，かどの形」という図形の角として導入される。第 4 学年では図形の角から回転角へ拡張され，直角は 90° の角度を持つ角として再定義される。

実践では，5×5 のドット図を配付し，「点と点を結んだ 2 本の直線で直角を作りましょう。」という問題を提示した。三角定規や分度器で，直角が存在する組み合わせ，直角が存在しない組み合わせを確認した後，「2 本の直線が交わってできる角が直角のとき垂直」という垂直の定義を共有した。

練り上げでは，「垂直であるが直線が交わらない図」を提示し，「これは垂直？」という発問行為を行った。児童は「直線が繋がっていないから垂直ではない」と説明した。そこで，「どこまでも伸ばしてもよい真っすぐな線」と直線を再定義した。児童は，直線を伸ばすと直角があることから垂直と判断していた。これにより，直角の有無による垂直判断は，R1「2 直線が交わらないことがない限り」有効であることから，W1「直角」の蓋然性は Q1「恐らく」となり，直線の交わり方に着目した W2「垂直」判断へと修正された。

その後，「垂直ではなく，直線も交わらない図」を提示し，R2「2 直線が直交しないことがない限り」において，2 本の直線が直角に交わっているとき，垂直と判断できることが共有された。練り上げを通して，垂直判断の根拠が B1「回転角=90°」から B2「直交する 2 直線の位置関係」へと修正され，認識論的障害の克服に至った。

一連の Argumentation は，図 6 のように示される。

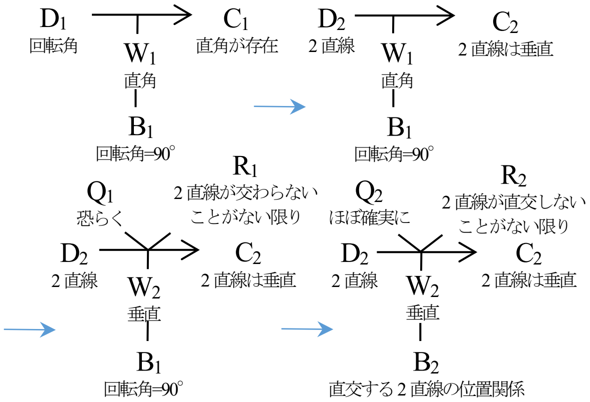


図６．Argumentation：垂直

４．算数教育における練り上げの設計

既述の実践の分析に基づき，算数教育における練り上げの設計に向けて，以下の設計原理と設計方法を設定する。これにより，学習指導を行う上で，理論的な視座からの練り上げの設計が可能になると考える。

《設計原理 *Design Principle*》
DP0：〈学習過程としての誤答の原理〉
誤ること自体を集団として許容し，誤答の修正を学習過程の一部として位置づける。
DP1：〈認識論的障害の克服の原理〉
全ての学習場面には既有知識が存在するため，算数学習を認識論的障害の克服として捉える。
DP2：〈Argumentation の原理〉
練り上げでは，集団による批判や論駁を通して，Argumentation を展開する。
DP3：〈裏付けへの間接的接近の原理〉
練り上げにおいては，学習者が裏付けを用いて論証することにより，裏付けを間接的に修正する。

《設計方法 *Design Strategies*》
DS0：〈誤答の想定〉
学習者の誤答を先行研究や実態を基に想定する。
DS1：〈認識論的障害の克服過程の同定〉
DS0 に基づき，数学史やカリキュラムの分析を通して認識論的障害を特定し，その克服過程を否定により特徴づける。
DS2：〈Argumentation の構想〉
DS1 に基づき，修正前と修正後の Argument を同定し練り上げにおける Argumentation を構想する。
DS3：〈「反証と限定詞の顕在化による発問行為〉
DS2 に基づき，Argumentation の展開に向けて反証や限定詞の顕在化という視点から練り上げにおける発問行為を構想する。

５．成果と課題

本稿では，練り上げの設計原理と設計方法を明らかにした。本稿では個人の認識の変容に焦点化したが，集団的 Argumentation を分析することは今後の課題とする。また，教師の発問行為に焦点を当てたが，児童自らが問うことの支援についても，今後の課題とする。

引用・参考文献

阿部好貴（2015）．「数学的モデル化と論証の接続に関する一考察 数学的リテラシーの視点から」．日本数学教育学会『数学教育学論究 臨時増刊』，pp.1-8.
岩崎秀樹（1992）．「数学学習における「否定」の研究(1)」．日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』，第 25 号，pp.13-18.
岩崎秀樹（2007）．『数学教育学の成立と展望』．ミネルヴァ書房.
大滝孝治（2013）．「確率ミスコンセプションの克服に関する否定論的考察－小数の法則を事例として－」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 19 巻，第 2 号，pp.109-115.
トゥールミン,S.（戸田山和久・福澤一吉 訳）（2011）．『議論の技法』．東京図書.
長沢圭祐（2015）．「Argumentation を視点とした算数教育における練り上げに関する研究」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第 97 巻，pp.137-144.
長沢圭祐（2018）．「Argumentation を視点とした算数教育における練り上げの発問行為に関する基礎的研究」．全国数学教育学会『数学教育研究』，第 24 巻，第 1 号，pp.25-36.
バシュラール, G.（及川馥・小井戸光彦 訳）（1975）．『科学的精神の形成－客観的認識の精神分析のために－』．国分社.
溝口達也（1995）．「認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ－極限概念を事例として－」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第 63-64 巻，pp.27-48.
山口武志（2013）．「算数・数学教育における社会的相互作用に関する認識論的研究－社会文化主義的アプローチにおける社会的相互作用に関する考察－」．鹿児島大学『鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編』，第 64 巻，pp.11-27.
Tall, D. (2014). Making Sense of Mathematical Reasoning and proof, Michael, N. Fried. & Tommy, Drefus. (eds.), Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground (pp.223-235). Springer.